## PROBLÈME A

$\mathcal{F}$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. À tout couple $(f, g)$ de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$, on associe l'application $h = f * g$ définie pour tout $x$ par

$$h(x) = \int_0^x f(t) \cdot g(x - t)\, dt .$$

1° Comparer $f * g$ et $g * f$.

Montrer que $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$
et que $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ $f * (\lambda g) = \lambda (f * g)$.

2° On suppose dans cette question $f$ et $g$ définies par :

$x \leqslant 0$ $f(x) = g(x) = 0$

$x > 0$ $f(x) = x^p$, $g(x) = x^q$ $p, q$ entiers positifs.

On pose $f * g = \mathrm{I}(p, q)$.

Établir une relation de récurrence entre $\mathrm{I}(p, q)$ et $\mathrm{I}(p + 1, q - 1)$.

En déduire $\mathrm{I}(p, q)$.

3° On suppose dans cette question $f$ et $g$ définies par :

$$f(x) = |x - 1| \qquad g(x) = |x| .$$

Calculer $h(x) = f * g(x)$.

L'application $h$ est-elle continue? Dérivable? La représenter graphiquement.

4° On suppose dans cette question $f$ définie par $f(x) = x^2 - x - 1$, $g$ appartenant au sous-espace de $\mathcal{F}$ constitué par les fonctions ayant des dérivées de tout ordre.

En écrivant $f * g(x)$ sous la forme

$$f * g(x) = x^2 \int_0^x a(t)\, dt + x \int_0^x b(t)\, dt + \int_0^x c(t)\, dt ,$$

montrer que $f * g$ admet des dérivées de tout ordre et calculer les trois premières.

Vérifier que l'application $\varphi$ : $g \longmapsto f * g$ est linéaire.

Quelle est l'image par l'application $\varphi$ du sous-espace de $\mathcal{F}$ formé des solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + y' - 2y = 0 .$$

## PROBLÈME B

On se propose d'étudier les suites de nombres réels $u_n = f(n)$ définies par la donnée des trois premiers termes $u_0, u_1, u_2$, et par la relation de récurrence :

$$f(n + 3) = 2f(n + 2) + f(n + 1) - 2f(n) \qquad \text{(E)}$$

1° Montrer que l'ensemble des suites vérifiant l'équation (E) a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

2° En désignant par $\mathrm{F}(n)$ la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} f(n) \\ f(n + 1) \\ f(n + 2) \end{pmatrix}$$

déterminer la matrice A (3 lignes, 3 colonnes) telle que

$$\mathrm{F}(n + 1) = \mathrm{AF}(n)$$

On en déduit alors immédiatement que $\mathrm{F}(n) = \mathrm{A}^n \mathrm{F}(0)$.

3° Calculer explicitement $\mathrm{A}^n$ en fonction de $n$.

On pourra diagonaliser A et dans ce cas on placera les valeurs propres par ordre croissant.

En déduire $f(n)$ en fonction de $u_0 = f(0)$, $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$.

4° Dans le cas particulier $f(0) = 3f(1) = 12f(2) = 18$, quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général

$$\frac{f(n)}{n!} x^n \ ?$$

Quelle est la somme de cette série à l'intérieur de l'intervalle de convergence?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail